Colles 1D2

Simon JEAN

Septembre 2021

1 Exercice n°1 : dérivées

Enoncé

Soit les fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \ln(x^2y)x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

$$g(x,y) = \exp\left(\frac{x}{y}\right)x^3y^5$$

$$h(x,y) = \left(y^3x^2 + y^2x^3\right)^{\frac{1}{2}}\ln(x+y)$$

Dérivez chaque fonction par rapport à chacune de ses variables.

2 Exercice n°2 : courbes d'indifférences

La fonction d'utilité $U(x,y)$ est une fonction dite "Stone Geary", qui diffère un peu de la fonction Cobb Douglas :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$U(x,y) = (x-\gamma_1)^{\alpha_1}(y-\gamma_2)^{\alpha_2}$$

1. Trouvez l'équation de la courbe d'indifférence dans le plan (x_1, x_2)
2. Analysez les courbes d'indifférence suivantes en :
   - Vérifiant qu'elles sont décroissantes dans le plan (x,y)
   - Vérifiant qu'elles sont concaves dans le plan (x,y)
   - Calculant les asymptotes où :

   $$\lim_{x\to\infty} y$$

   $$\lim_{x\to\gamma_1} y$$

   Comment interprétez vous les paramètres γ?

3. Ensuite, tracez les courbes d'indifférences
4. Enfin, pour un niveau de revenu R fixé, donnez l'équation de la contrainte budgétaire du consommateur
5. Tracez la contrainte budgétaire et le point d'équilibre du programme du consommateur.
6. Calculez les demandes marshaliennes *sous l'hypothèse que* $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$
7. *Bonus :*
   (a) Ecrivez la différentielle totale de la fonction d'utilité
   (b) Ecrivez la différentielle totale d'une contrainte budgétaire (où le revenu ne varie pas).

   Si vous arrivez là, on s'arrête et on a un super moment pour bien comprendre la nature du TMS!

La relation d'équilibre $TMS = \frac{p_1}{p_2}$: préférences individuelles et collectives

Un peu de texte, "avec les mains"

Pour comprendre pourquoi on arrive à une égalité entre ces deux grandeurs, on va essayer de comprendre un peu plus ce que cela veut dire.

Ce qu'on cherche à faire fondamentalement, dans le problème du consommateur, c'est de trouver les niveaux de consommation qui vont permettre à l'agent de maximiser son utilité, qui modélise les relations de préférence, sous contrainte que le panier de biens respecte la contrainte budgétaire.

Dans le problème du consommateur, on va voir que le but du jeu est de se débrouiller pour que la valorisation **personnelle** qu'il porte aux deux biens reflète la valorisation **collective**, que l'ensemble de la collectivité porte aux biens, c'est à dire, **les prix**. C'est la première étape : c'est ce qui permet d'abord de trouver les "proportions" dans lesquelles on va consommer. Si vous voulez, c'est comme si vous vous disiez: avec chaque café que vous allez boire, vous allez fumer une cigarette. Ou alors à chaque fois que vous mangez 100g de céréales, vous buvez 30cl de lait.
Cela ne détermine pas combien en tout vous allez boire, fumer ou manger. Cela détermine les proportions qui vous plaisent, les montants **relatifs** de consommation.

Ensuite, les montants **absolus** de consommation sont déterminés par la contrainte budgétaire. Vous connaissez les proportions, puis enfin vous regardez combien vous pouvez vous offrir de tout ça.

L'idée c'est donc de chercher la courbe d'indifférence qui va toucher la contrainte de revenu, là où la valorisation personnelle (le TMS) de l'agent concorde avec la valorisation collective des biens (les prix) sous contrainte du revenu.

On va voir enfin ce qu'il se passe mathématiquement, et pourquoi on a cette égalité, plutôt que des inégalités.

Un peu de formalisme mathématique

Le TMS et les préférences individuelles

On a d'abord la fonction d'utilité :

$$U = U(x_1, x_2)$$

On cherche la courbe d'indifférence et comment x_1 et x_2 peuvent bouger sur la courbe :

$$dU = 0$$

$$dU = 0 \iff dx_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0$$

Ce que ça veut dire ici, c'est que on cherche les *variations* de bien x_1, qui apportent l'utilité marginale $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, et de bien x_2 qui apportent l'utilité marginale $\frac{\partial U}{\partial x_2}$ *sans que l'utilité ne bouge.*

$$dx_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} = -dx_2 \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

Cette équation est fondamentale : elle dit que si on retire une unité de bien x_1, on perd l'utilité marginale $\frac{\partial U}{\partial x_1}$. Pour rester à utilité constante, il faut compenser par une variation dx_2 qui apporte l'utilité $\frac{\partial U}{\partial x_2}$. Avec un petit exemple chiffré :

- On retire une unité de bien 1 : $dx_1 = -1$
- Qui apporte l'utilité marginale $\frac{\partial U}{\partial x_1} = 3$
- L'utilité marginale qu'on retire de la consommation de bien 2 à ce moment là est de $\frac{\partial U}{\partial x_2} = 2$

$\Rightarrow$ Il faut donc une variation de consommation dx_2 qui soit égale à 1,5 car :

$$-1 \times 3 = -2 \times 1,5$$

On peut modifier un peu cela, et obtenir un ratio d'échange, qui reflète *l'utilité marginale relative* qu'apportent les biens au consommateur. Cela représente donc un **ratio des valeurs personnelles** du consommateur. Ces valeurs changent, var l'utilité marginale est variable. Ce ratio des valeurs personnelles, bingo, c'est **le TMS**.

$$dx_1 \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -dx_2$$

On va donc poser pour réfléchir, et pour la suite de ce qui suit, que $dx_1 = -1$. Ce que nous dit donc le TMS, c'est que pour compenser la perte d'une unité de bien 1, il faut donner *TMS unités de bien 2.*

Le rapport des prix, la contrainte budgétaire et les préférences collectives

Les prix, dans la théorie économique, sont déterminés instantanément. En gros, on a une collectivité d'offreurs et de demandeurs, et un commissaire priseur trouve, instantanément, les prix qui permettent d'équilibrer offre et demande.

Les prix (et en fait le rapport des prix) sont donc sensés refléter *les préférences collectives* de la société, l'ensemble des préférences ainsi que des conditions productives de l'économie. On dit que les prix contiennent toute l'information économique nécessaire (dans les cas où la théorie marche bien).

Prenons la contrainte budgétaire, et supposons que le revenu de l'agent est constant. On a donc :

$$\begin{aligned} R &= p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ \Rightarrow dR &= 0 = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \\ \iff p_1 dx_1 &= -p_2 dx_2 \end{aligned}$$

Ce que ça veut dire ici, c'est que si jamais on ne peut pas changer notre revenu, il faut compenser l'augmentation de consommation d'un bien par la baisse de l'autre, le tout en prenant en compte les prix.

Cette équation doit vous rappeler un peu plus celle du dessus avec l'utilité.

Donc si je dois compenser la perte d'une unité de bien 1, il me faut

$$-dx_2 = \frac{p_1}{p_2} dx1$$

Ou avec notre hypothèse $dx_1 = -1$:

$$dx_2 = \frac{p_1}{p_2}$$

Pour compenser la perte de bien 1, il faut, pour rester à revenu constant, me donner $\frac{p_1}{p_2}$ *unités de bien 2*

Maintenant, on peut tout mettre ensemble.

Alors, TMS=rapport des prix !

Comme annoncé plus haut, on va voir pourquoi on n'a pas d'inégalité.

Supposons que $TMS > \frac{p_1}{p_2}$. Qu'est ce que ça veut dire?

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} > \frac{p_1}{p_2}$$

Cela veut dire que la variation de bien 2 qu'il faut pour rester à utilité constante est plus que celle pour rester à revenu constant. Autrement dit, il faudrait donner plus de bien 2 que ce que l'on peut se permettre.

On choisit donc de prendre moins de bien 2. Dans ce cas :

- On augmente x_1
- Ce qui diminue l'utilité marginale, qui est décroissante, donc $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ baisse

- Dans l'autre sens, on réduit x_2
- Ce qui augmente l'utilité marginale du bien 2.

Donc le TMS baisse. Il se rapproche du rapport des prix. On aurait encore besoin de plus de bien 2 que ce que l'on peut se permettre pour rester à utilité constante. On répète l'opération. Et là, on arrive à l'équation tant recherchée :

$$\frac{\frac{\partial U}{x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

L'équation dit donc que l'on a enfin une adéquation entre le rapport des valeurs personnelles et et le rapport des valeurs collectives. C'est le but de cette procédure.

Maintenant que l'on a cette équation et la contrainte budgétaire, on peut trouver les demandes marshaliennes!